01 : Classification de points fixes dans $\mathbb{R}$

Référence : Demailly p97 Leçons possibles : 226, 233

Outils : Points fixes attractifs/répulsifs, application contractante et théorème de point fixe de Banach-Picard, formule de Taylor.

Proposition : Classification de points fixes dans $\mathbb{R}$

On considère une fonction $f : I \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$ où I est un segment de $\mathbb{R}$. Soit a un point fixe de f. Alors on distingue trois cas :

1. Si |f'(a)| < 1, alors a est attractif.
2. Si |f'(a)| > 1, alors a est répulsif.
3. Si |f'(a)| = 1, on ne peut à priori rien dire.

En plus de démontrer cette proposition, on va ici étudier plus en détail les deux premiers cas.

1. Dans le premier cas, $\mathbb{R}$ est complet, donc il existe k réel et tel que $|f'(a)| < k < 1$. De plus, f' est continue, donc on peut réécrire la condition $|f'(a)| < k$ de la manière suivante :

$$\exists\, h > 0 \mid \forall\, x \in [a-h; a+h] : \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leqslant k$$

Ceci implique que f est k-lipschitzienne, et donc contractante sur $E := [a-h; a+h]$. On a bien $f(E) \subset (E)$, donc on peut appliquer le théorème de point fixe et a est un point fixe attractif dont le bassin d'attractivité contient au moins E. Si a est sur un bord de I, $E = [a-h; a]$ ou $E = [a; a+h]$ convient.

Pour aller plus loin, on peut démontrer par récurrence que la convergence d'une suite définie par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ prise dans le bassin d'attraction est exponentiellement rapide. En effet si $u_0 \in [a-h; a+h]$, alors comme a est point fixe de f et $f(u_n) = u_{n+1}$, on a :

$$|u_1 - a| \leqslant k|u_0 - a| \implies |u_2 - a| \leqslant k^2|u_0 - a| \implies \dots \implies |u_n - a| \leqslant e^{n\ln(k)}|u_0 - a|$$

Prenons maintenant le cas particulier $f'(a) = 0$. Supposons que f est de classe $\mathscr{C}^2$ avec sa dérivée seconde bornée en valeur absolue par $M > 0$ sur l'intervalle E, construit de la même manière que précédemment. Pour $x \in E$, on peut appliquer la formule de Taylor. Il existe alors c situé strictement entre a et x tel que :

$$\begin{array}{rrcll}
 & f(x) = & f(a) & +(x-a)f'(a) & +\frac{(x-a)^2}{2}f''(c) \\
\implies & f(x) = & a & & +\frac{(x-a)^2}{2}f''(c) \\
\implies & |f(x) - a| \leqslant & \frac{(x-a)^2}{2}M & & \\
\iff & \frac{M}{2}|f(x) - a| \leqslant & (\frac{M}{2}(x-a))^2 & &
\end{array}$$

De la dernière inégalité, on peut déduire une vitesse de convergence de la même manière que précédemment :

$$\frac{M}{2}|u_1 - a| \leqslant (\frac{M}{2}(u_0 - a))^2 \implies \dots \implies |u_n - a| \leqslant \frac{2}{M}(\frac{M}{2}|u_0 - a|)^{2n}$$

On remarque qu'il faut exiger $|u_0 - a| \leqslant \frac{2}{M}$ pour que la majoration assure une convergence. On parle de convergence quadratique et de point fixe superattractif.

2. Si |f'(a)| > 1, on peut, par continuité, assurer qu'il existe $h \in I$ tel que pour tout $x \in [a-h; a+h] \setminus \{a\} := E$ on a : $|f(x) - a| > |x - a|$ (La justification est similaire au point 1., avec $|f'(a)| > k > 1$). Alors a est bien un point fixe répulsif de bassin de répulsion au moins E.

On peut néanmoins remarquer que $|f'(a)| > 1$ implique qu'il existe $E' = [a + -h'; a + h']$ tel que f' ne s'annule pas et ne change donc pas de signe (par continuité). f est alors une fonction continue strictement monotone sur E'. On peut alors définir une fonction inverse $f^{-1} : f(E') \to E'$, avec $f(a) = a \in E' \cap f(E')$.

Sur $E' \cap f(E')$, on a $f(x) = x \iff x = f^{-1}(x)$. D'où : $f'(a) = (f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))} = \frac{1}{f'(a)} < 1$.
En se ramenant au point 1., a est donc un point fixe attractif de f^{-1}.

3. Si $f'(a) = 1$, on donne deux contre-exemples en $a = 0$. a est attractif sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ pour la fonction sinus trigonométrique et pourtant répulsif sur tout $\mathbb{R}$ pour la fonction sinus hyperbolique.